**Множини *n*-ок натуральних чисел**

Множина *А* *n*-oк натуральних чисел називається ПР, Р або РП, якщо такою є множина ***с***(*А*) номерів всіх *n*-ок із *А*.

**7.1. Властивості множин *n*–ок натуральних чисел**

**Теорема 7.1.** Якщо функція *f*(*x*1, … , *xn*) рекурсивна (примітивно рекурсивна), то множина *М* розв’язків рівняння

*f*(*x*1, … , *xn*) = 0

є рекурсивною (примітивно рекурсивною) множиною.

Доведення. Алгоритм для обчислення характеристичної функції множини *М* наступний:

function χ*М* (*x*1, … , *xn*)

begin

if *f*(*x*1, … , *xn*) = 0 then χ*М* := 0

else χ*M* := 1

end.

**Теорема 7.2.** Для того, щоб непуста сукупність *n*-ок була РП необхідно і достатньо, щоб вона була сукупністю всіх *n*-ок виду

< *f*1(*x*), … , *fn*(*x*)>, *x* = 0, 1, … .

де *f*1(*x*), … , *fn* (*x*) – деякі ПРФ.

Достатність (множина всіх *n*-ок виду <*f*1(*x*), … , *fn*(*x*)>, *x* = 0, 1, … , де *fi* – ПРФ є РПМ множиною). Часткова характеристична функція χ*М* множини *М* канторових номерів *n*-ок виду <*f*1(*x*), … , *fn*(*x*)>, *x* = 0, 1, … , може бути обчислена алгоритмом:

function χ*М* (*x*)

begin

*i* := 0

while ***с***(*f*1(*i*), … , *fn* (*i*)) ≠ *x*

do *i* := *i* + 1

χ*M* := 0

end.

Необхідність (множина *n*-ок *М* – РПМ ⇒ співпадає з множиною всіх *n*-ок виду < *f*1(*x*), … , *fn* (*x*)>, *x* = 0,1, … , де *fi* – ПРФ). Множина *А* канторових номерів *n*-ок з *М* співпадає з множиною значень функції

function *f*(*x*)

begin

if *F*(***l***(*x*), ***r***(*x*)) = 0 then *f* := ***l***(*x*)

else *f* := *b*

end,

де *F*(*a*, *x*) така, що рівняння *F*(*a*, *x*) = 0 має розв’язок ⇔ *a* ∈ *A*, а *b* ∈ *A*. Тому, множина *М* співпадає з множиною

<***с****n*1(*f*(*x*)), … , ***c****nn*(*f*(*x*))>, *x* = 0, 1, ... .

Графіком функції *F*(*x*1, … , *xn*) називається сукупність (*n* + 1)-ок виду <*x*1, … , *xn*, *F*(*x*1, … , *xn*)>.

**Теорема 7.3.** Якщо графік *Gf*  всюди визначеної функції *f*(*x*1, … , *xn*) є РПМ, то функція *f* рекурсивна.

Доведення. Графік *Gf*  – це сукупність (*n* + 1)-ок виду:

<*f*1(*t*), … , *fn* (*t*), *g*(*t*)>,

де *fi*, *g* – ПРФ. Тоді значення функції *f* в довільній точці можна обчислити за допомогою наступного алгоритму:

function *f*(*x*1, … , *xn*)

begin

*i* := 0

while *f*1(*i*) ≠ *x*1 ∨ … ∨ *fn*(*i*) ≠ *xn*

do *i* := *i* +1

*f* := *g*(*i*)

end,

отже, функція *f* – рекурсивна.

**7.2. Допустимі функції**

 Клас ПРФ визначається наступним чином. Задається клас найпростіших ПРФ *o*(*x*) = 0, *s*(*x*) = *x* + 1, (*x*1, … , *xn*) = *xm*, де *n* ≥ *m* ≥ 1. Будь-яка функція, яка обчислюється алгоритмом

1. function *f*(*x*1, … , *xn*)

begin

*f* := *h*(*g*1(*x*1, … , *xm*), … , *gn*(*x*1, … , *xm*))

end

або алгоритмом

1. function *f*(*x*1, … , *xn*, *y*)

begin

if *y* := 0 then *f* = *g*(*x*1, … , *xn*)

else *f* := *h*(*x*1, … , *xn*, *y*, *f*(*x*1, … , *xn*, *y* – 1))

end,

де *gi*, *h* – ПРФ, називається ПРФ.

Виявляється, що клас ПРФ можна визначити іншим способом. А саме, функції *s*(*x*) = *x* + 1, *q*(*x*) = *x* ∸ [] будемо називати найпростішими допустимими функціями. Будь-яка одномісна функція, яка обчислюється алгоритмом

с) function *f*(*x*)

begin

*f* := *h*(*x*) + *g*(*x*)

end,

або алгоритмом

1. function *f*(*x*)

begin

*f* := *h*(*g*(*x*))

end,

або алгоритмом

1. function *f*(*x*)

begin

if *x* = 0 then *f* := 0

else *f* := *h*(*f*(*x* – 1))

end,

де *g*, *h* – допустимі функції, називається допустимою функцією (ДФ).

Будь-яка *n*-місна функція *f*(*x*1, … , *xn*) – ДФ, якщо одномісна функція *f*(*α*1(*t*), … , *αn*(*t*)) може бути обчислена алгоритмами c) – e), де *αi*(*t*) довільні ДФ.

**Теорема 7.5.** Клас ПРФ співпадає з класом ДФ.

**Наслідок** (Торема Робінсон)**.** Клас одномісних допустимих функцій співпадає з класом одномісних ПРФ.